

FUZZY LOGIC

Dr G. J. C. Lokhorst
Sectie Filosofie en Informatica,
Faculteit der Wijsbegeerte,
Erasmus Universiteit Rotterdam.

Uit: *Computational Intelligence: Fuzzy logic en neurale netwerken (Proceedings Symposium Elektrotechniek 10 mei 1995)*. Delft, Electrotechnische Vereeniging, 1995.

1 Vaagheid als logisch probleem

De logica kan beschreven worden als de wetenschap die zich bezighoudt met het onderzoeken van de geldigheid van redeneringen. De meeste redeneringen die we in het dagelijks leven, de wetenschap en de techniek tegenkomen staan echter bol van de vage begrippen [1, 8]. Of het nu om een huis-tuin-en-keuken begrip als “tafel,” een wetenschappelijk begrip als “electron” of technische begrippen als “computer” en “computational intelligence” gaat, een precieze definitie valt vrijwel nooit te geven. Door de vaagheid van onze begrippen is de geldigheid van onze redeneringen vaak onduidelijk. Het fenomeen vaagheid vormt dan ook een groot probleem voor de op precisie gerichte logica.

In de loop van de tijd hebben logici het verschijnsel van de vaagheid op twee manieren benaderd. De eerste strategie is die van de “precisificatie” [2, ch. 1]: vóór een redenering op haar geldigheid kan worden onderzocht moet zij eerst volkomen ondubbelzinnig zijn gemaakt. Zodra ze ondubbelzinnig is gemaakt kan ze worden vertaald in één van de vele kunsttalen die in de logica bestaan. Voor deze kunsttalen bestaan precieze definities van geldigheid. Als een redenering eenmaal in een logische kunsttaal is vertaald wordt het bepalen van haar geldigheid simpelweg een kwestie van rekenwerk; zolang ze daar nog niet in is vertaald is het onduidelijk wat we bedoelen als we haar geldig of ongeldig noemen. Het begrip geldigheid heeft een duidelijke betekenis als we het over formele kunsttalen hebben; als we het daarentegen over de geldigheid of ongeldigheid van een redenering van een Nederlandse politicus hebben, bezondigen we ons zélf aan wollig taalgebruik.

De strategie van de precisificatie is altijd de populairste geweest in de moderne formele logica. In het begin was daar ook alle reden toe: de eerste moderne logici (Boole, Frege, Russell) hielden zich vooral bezig met de bestudering van wiskundige redeneringen, die zich bij uitstek lenen tot heldere analyse. In de eerste helft van onze eeuw begon men zich echter ook te richten op de verheldering van niet-wiskundig taalgebruik, en toen bleek deze strategie steeds minder goed te werken [1, 8]. Daardoor kwam in 1937 een tweede strategie op, die veel stoutmoediger was: men vatte het plan op om de koe (de vaagheid) bij de horens te grijpen en om formele logische stelsels te ontwikkelen waar vage zinnen direct, zonder nadere analyse, in kunnen worden weergegeven. Max Black was de grondlegger van dit gebied van de “vage logica” [1], maar het werd eigenlijk pas populair door het werk van de electrotechnische ingenieur Lofti Zadeh [11, 12]. Zadeh werd eerst nauwelijks serieus genomen, maar het tij is inmiddels gekeerd. De fuzzy logic maakt op dit moment een stormachtige ontwikkeling door. Gedurende de laatste paar jaren zijn er letterlijk honderden (of misschien wel duizenden) publicaties op dit gebied verschenen. ([6] is een handzame inleiding.)

2 De paradox van de kale man

Laten we als concreet voorbeeld van een redenering waarin vaagheid een cruciale rol speelt de “paradox van de kale man” onder de loep nemen. Deze paradox wordt ook wel de “paradox van de zandhoop” of de “sorites-paradox” (letterlijk: “opgehoopte paradox”) genoemd. Ze werd in de vierde eeuw voor Christus verzonnen door Euboelides, een tijdgenoot van Plato en Aristoteles. De ontdekking van de vaagheid stamt dus uit dezelfde tijd als de geboorte van de logica.

Diogenes Laërtius geeft de volgende beschrijving van de sorites-paradox in zijn amusante boek *De levens en meningen van de beroemde filosofen*:

Het kan niet zo zijn dat als twee weinig is, drie niet eveneens weinig is, noch dat als twee of drie weinig is, vier niet eveneens weinig is; en zo voorts tot en met tien. Maar twee is weinig, en tien daarom ook. [3, VII §82]

Het is niet moeilijk om op deze paradox te variëren. Neem bijvoorbeeld een zandhoop. Als je er een korreltje zand vanaf haalt is het nog steeds een zandhoop. Doe dit even vaak als er korreltjes zand in de zandhoop zitten. Heb je dan nog steeds een zandhoop? Of beschouw een man of vrouw met een weelderige haardos. Als je één haartje van zijn of haar hoofd afhaalt, zal hij of zij natuurlijk nog steeds een weelderige haardos hebben, en als je er

nóg een haartje van afhaalt zal dit nog steeds zo zijn. Maar als er nog slechts honderd haren op het hoofd resteren kun je moeilijk meer van een weelderige haardos spreken. We kunnen ook bewijzen dat niemand intelligent is. Immers, iemand met één hersencel is niet intelligent. Eén hersencelletje méér kan onmogelijk verschil maken, et cetera ad infinitum ...

Wat gaat hier mis? Zou de fuzzy logic uitkomst kunnen bieden? Om te bepalen wat de fuzzy logic inhoudt zullen we eerst de klassieke logica even in herinnering brengen.

3 Klassieke logica

De taal van de klassieke logica (dat wil zeggen, de klassieke propositielogica of eerste-orde predicatenlogica zonder quantificatie) ziet er als volgt uit. De basisbouwstenen zijn de zogenaamde atomaire zinnen. Een atomaire zin is een formule van de vorm $Fa_1a_2 \dots a_n$, waar F een n -plaatsig predicaat is en a_1, \dots, a_n individuele constanten zijn.

Een voorbeeld: laat H een twee-plaatsig predicaat zijn dat staat voor “houdt van” en laat de individuele constanten b en c staan voor “Beatrix” en “Claus”; dan is Hbc een atomaire zin die gelezen kan worden als “Beatrix houdt van Claus.” Een atomaire zin als $Labc$ kan gelezen worden als “Bristol ligt tussen Amsterdam en Chicago.”

Atomaire zinnen worden aaneengesmeed tot moleculaire zinnen met behulp van voegwoorden (connectieven). We zullen aannemen dat \neg (“niet”) en \rightarrow (“impliceert”) de enige twee primitieve voegwoorden zijn en definiëren \vee (“inclusief of”) en \wedge (“en”) als volgt:

1. $\phi \vee \psi = (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$;
2. $\phi \wedge \psi = \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$.

ϕ en ψ staan hier voor willekeurige zinnen (die zelf ook connectieven mogen bevatten). De taal \mathcal{L} wordt nu gedefinieerd als de kleinste verzameling die de verzameling atomaire zinnen bevat en gesloten is onder \neg en \rightarrow .

Waarheid en geldigheid worden als volgt gedefinieerd. Een model voor de taal \mathcal{L} is een structuur $\mathfrak{M} = (D, I)$ waar I een functie is die aan iedere individuele constante a een object $I(a) \in D$ toekent en aan ieder n -plaatsig predicaat F een n -plaatsige functie $I(F) : D^n \mapsto \{0, 1\}$.

De waarheidswaarde van een zin ϕ wordt geschreven als $V(\phi)$ en hangt als volgt van I af:

1. $V(Fa_1 \dots a_n) = I(F)(I(a_1), \dots, I(a_n))$;

2. $V(\neg\phi) = 1 - V(\phi)$;
3. $V(\phi \rightarrow \psi) = \min(1, 1 - (V(\phi) - V(\psi)))$.

Merk op dat

1. $V(\phi \wedge \psi) = \min(V(\phi), V(\psi))$;
2. $V(\phi \vee \psi) = \max(V(\phi), V(\psi))$.

We zeggen dat ϕ *geldig* is als $V(\phi) = 1$ in alle modellen.

Een voorbeeld van een ongeldige zin: Hbc (“Beatrix houdt van Claus”). Hbc is waar in alle modellen waarin $I(H)(I(b), I(c)) = 1$, maar er zijn modellen waar de stand van zaken anders is.

4 Fuzzy logic

De fuzzy logic wijkt in één belangrijk opzicht van de zojuist beschreven logica af: er vindt een generalisatie van de functie $I(F)$ plaats. Deze functie kan nu niet alleen meer de waarden 0 en 1 aannemen, maar alle reële getallen in het gesloten interval $[0, 1]$. Dus:

$$I(F) : D^n \mapsto [0, 1] \subseteq \mathbb{R}.$$

Een dergelijke functie wordt “membership function” of “fuzzy set” genoemd.

De definities van waarheid en geldigheid blijven ongewijzigd. We kunnen nog steeds bewijzen dat

1. $V(\phi \wedge \psi) = \min(V(\phi), V(\psi))$;
2. $V(\phi \vee \psi) = \max(V(\phi), V(\psi))$.

Het resultaat van dit alles is oud en vertrouwd: het is niets anders dan de oneindig-waardige propositie-logica L_ω van Łukasiewicz uit 1922 [10].

Noch de “wet van de uitgesloten derde,” $\phi \vee \neg\phi$, noch de “wet van de non-contradictie,” $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$, zijn volgens deze logica geldig (neem bv. $V(\phi) = \frac{1}{2}$). Dit is natuurlijk precies wat we graag bij halve waarheden zouden zien.

De axiomatisering is als volgt (Wajsberg 1935; zie [10]):

1. $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$;
2. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$;
3. $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$;

4. $(\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$;
5. afleidingsregel (*modus ponens*): als ϕ en $\phi \rightarrow \psi$ stellingen zijn, dan is ψ dat ook.

Het volledigheidsbewijs (het bewijs dat alle geldige formules afleidbaar zijn) is verrassend moeilijk.

De taal kan uitgebreid worden met de quantoren \forall (“voor alle”) en \exists (“voor sommige”), waarvan de waarheidsdefinities analoog zijn aan die van \wedge en \vee , maar het resulterende systeem is dan niet meer te axiomatiseren [9].

Bovenstaand systeem van fuzzy logic is niet het enige dat er bestaat (in feite is geen enkele van de waarheidscondities onaangevochten); het is echter wel één van de meest gebruikelijke.

5 De sorites-paradox in het licht van de fuzzy logic

Kunnen we de sorites-paradox met deze vage logica nu de baas? Laten we eens kijken.

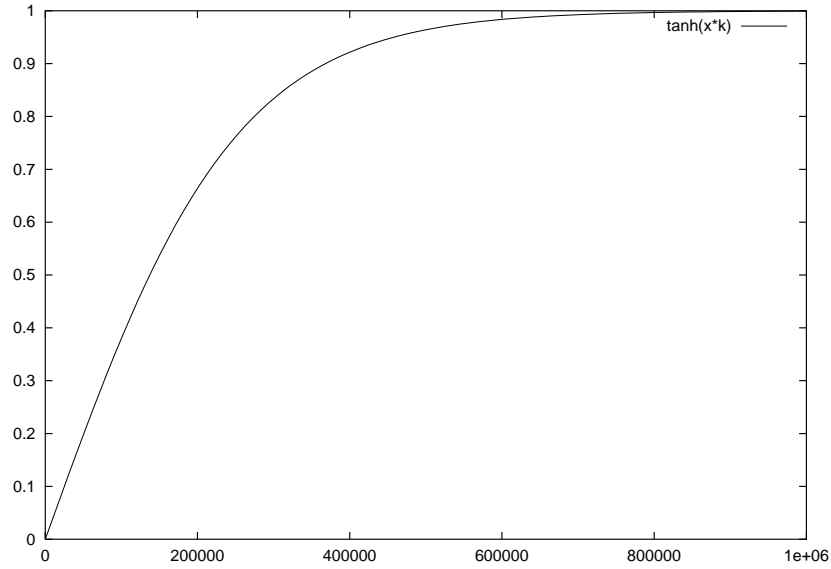
Laten we 10^6 (of meer) personen a_0, \dots, a_{10^6} beschouwen. a_0 heeft 0 haren op het hoofd, a_{10^6} heeft er 10^6 . Volgens de anatomie-boeken zijn er geen mensen met meer haren op het hoofd [4]. Het één-plaatsige predicat F staat voor “heeft een weelderige haardos.”

Een model dat de gang van zaken bij de sorites-paradox verduidelijkt zou er als volgt uit kunnen zien. $\mathfrak{M} = (D, I)$, waar

1. $D = \{0, 1, \dots, 10^6\}$;
2. $I(a_n) = n$ (mensen worden geïdentificeerd met hun aantal haren);
3. $I(F)(n) = \tanh(\kappa n)$. \tanh is de hyperbolische tangens functie, κ is een constante die we de waarde $4 \cdot 10^{-6}$ geven.

De grafiek die het verband tussen het aantal haren en de weelderigheid van de haardos uitdrukt lijkt redelijk in overeenstemming te zijn met onze intuïtieve ideeën (figuur 1). De precieze vorm van de grafiek is niet belangrijk, maar de beschikbaarheid van een concreet voorbeeld scherpt de gedachten. (Het aardige van de \tanh functie is dat “[it] is one of the few functions in the world that displays truly civilized behavior” [7, p. 69].)

We constateren nu de volgende feiten.

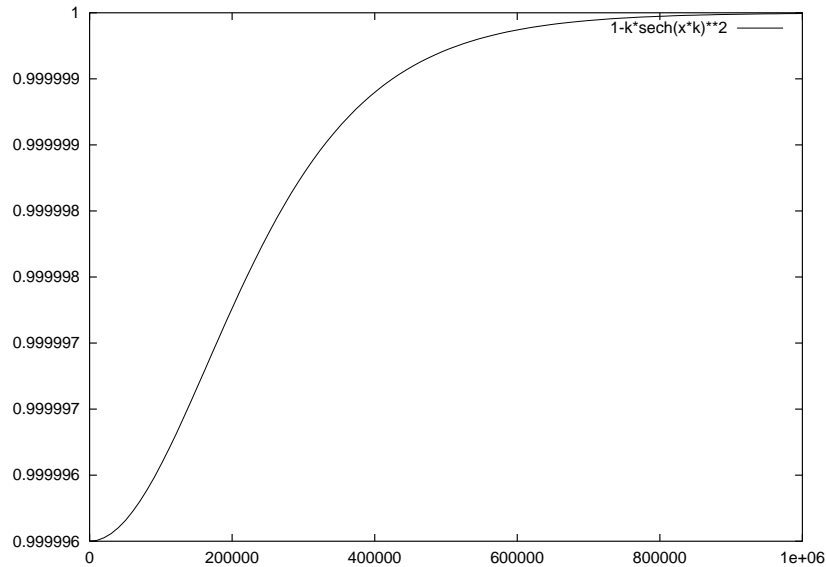


Figuur 1: Weelderigheid van de haardos als functie van het aantal haren.

1. $V(Fa_n) = \tanh(\kappa n)$. Dus $V(Fa_0) = 0$; a_0 heeft in het geheel geen weelderige haardos. Anderzijds is de waarheidswaarde van “ a_{10^6} heeft een weelderige haardos” nagenoeg maximaal (hoewel zij in principe altijd nog hoger zou kunnen zijn).
2. De waarheidswaarde van het “transitie-principe” $Fa_{n+1} \rightarrow Fa_n$, dat intuïtief aantrekkelijk is maar ons in de problemen brengt als we ons aan de klassieke logica houden, is zeer hoog:

$$\begin{aligned}
 V(Fa_{n+1} \rightarrow Fa_n) &= \min(1, 1 - (V(Fa_{n+1}) - V(Fa_n))) \\
 &= \min(1, 1 - (I(F)(I(a_{n+1})) - I(F)(I(a_n)))) \\
 &= \min(1, 1 - (\tanh(\kappa(n+1)) - \tanh(\kappa n))) \\
 &\approx \min(1, 1 - \tanh'(\kappa n)) \\
 &= 1 - \kappa \operatorname{sech}^2(\kappa n) \\
 &\geq 1 - \kappa.
 \end{aligned}$$

Het principe is dus bijna waar, maar net niet helemaal. Het is niet helemaal waar omdat de waarheidswaarde van het consequent altijd net iets kleiner is dan die van het antecedent (figuur 2).



Figuur 2: De waarheidswaarde van het transitie-principe $Fa_{n+1} \rightarrow Fa_n$.

Kortom, de fuzzy logic lijkt een goede analyse te bieden van wat er aan de hand is bij de sorites-paradox.

6 Bezwaren tegen de fuzzy logic

Fuzzy logici dragen de sorites-paradox regelmatig aan als demonstratie van het succes van hun benadering. Filosofen zijn hier echter zelden van onder de indruk. Hun belangrijkste bezwaar is heel simpel: ze vinden dat de fuzzy logic een te precieze benadering van vaagheid geeft en daardoor een gekunstelde indruk maakt.

Wat bedoelen zij hiermee? Wel, stel dat je hoort dat iemand een weelderige haardos heeft. Welke waarheidswaarde $V(\phi) \in [0, 1]$ zou je in vredesnaam aan deze uitspraak moeten toekennen? Dat is volstrekt onduidelijk. Volgens de fuzzy logic moet je zowel het precieze aantal haren als de curve die de mate van behaardheid gegeven het aantal haren beschrijft kennen om de waarheidswaarde van uitspraken over de behaardheid te kunnen bepalen. In de praktijk kennen we geen van beide. We kunnen dan ook alleen maar een arbitrair oordeel vellen over de waarheidswaarde. Ieder zijn eigen schatting van het aantal haren en ieder zijn eigen “waarheidscurve”; alles mag. Het zou misschien beter zijn om slechts *kwalitatieve* oordelen over waarheid te vellen (“volstrekt onwaar,” “niet helemaal onwaar,” “tamelijk waar,” “uitermate

waar”). Er blijft dan echter geen enkel logisch principe over [5, ch. 9.4].

Ingenieurs die de fuzzy logic toepassen hebben geen last van deze problemen. Ten eerste zijn de numerieke waarden van de input aan de “fuzzifier” die de eerste stap in het vage redeneerproces vormt precies bekend; deze worden geleverd door sensoren zoals thermokoppels. Ten tweede gaan de ingenieurs heel pragmatisch met de “waarheidscurve” om. Zij stellen haar gewoon net zolang bij tot het systeem adequaat functioneert. Goed beschouwd is er in de technische toepassingen helemaal geen sprake van vaagheid. Alle numerieke waarden zijn precies bekend; met deze waarden wordt volgens welomschreven regels gerekend; de vage predicaten waarmee het systeem wordt beschreven zijn niet meer dan toeters en bellen die de verkoop van het product moeten bevorderen.

Het valt nog maar te bezien of we de bezwaren van filosofen tegen de fuzzy logic als analyse van vaagheid serieus moeten nemen. Per slot van rekening is ieder model slechts een gedeeltelijke afspiegeling van de werkelijkheid; er is altijd een zekere discrepantie door idealisering. De fuzzy logic vormt geen uitzondering op deze algemene regel. Wat zouden we anders van een *analyse* van de *vaagheid* kunnen verwachten? De term “fuzzy logic” lijkt op zichzelf reeds een *contradictio in terminis* te zijn!

Men zou verwachten dat deze onderwerpen op dit moment, nu de fuzzy logic wereldwijd zo in de belangstelling staat, druk besproken worden in de filosofie van de logica. Zo is het echter niet. Er verschijnt nog steeds een niet-aflatende stroom van artikelen over de sorites-paradox (alleen de *Philosophers Index* vermeldt al 86 artikelen uit de laatste kwart eeuw), maar er is vrijwel geen filosoof te vinden die de directe confrontatie met de fuzzy logic aan durft te gaan. We moeten maar hopen op betere tijden ...

7 *Human computational intelligence*

Een heel andere kwestie dan de logische analyse van vage beweringen is de vraag hoe *mensen* eigenlijk met vaagheid omgaan. Om deze vraag te beantwoorden moeten we bij de cognitieve psychologie te rade gaan. Eén feit lijkt hier duidelijk te zijn: mensen bedienen zich van nature doorgaans niet of nauwelijks van inferenties in de fuzzy logic of welke andere logica dan ook.

In de cognitieve psychologie circuleren twee theorieën die in verband met vaagheid van belang zijn: de *prototype activatie* theorie, en de theorie van de *neurale netwerken* (door psychologen doorgaans “connectionisme” genoemd—psychologen houden van “ismen”). Volgens de eerste theorie denken we bij het horen van het woord “zandhoop” aan een prototypische zandhoop (zoiets als de gemiddelde zandhoop waarmee we als kind speelden); deze

zandhoop is behoorlijk groot en als we er een korreltje van afnemen blijft het inderdaad een zandhoop. Volgens de tweede theorie, die misschien op min of meer hetzelfde neerkomt als de eerste, activeert het horen van het woord “zandhoop” en het zien van een zandhoop allerlei platgetreden paden in de hersenen die tot de kenmerkende reacties op het horen van “zandhoop” of zien van zandhopen leiden (zoals denken aan de sorites-paradox).

Hoe gaan mensen met vaagheid om? De vraag is voor zowel de ingenieur als de logicus tamelijk irrelevant, en daarom zal ik haar verder laten rusten.

Referenties

- [1] Max Black. Vagueness: An exercise in logical analysis. *Philosophy of Science*, 4:427–455, 1937.
- [2] Rudolf Carnap. *The Logical Foundations of Probability*. Chicago University Press, Chicago, 1950.
- [3] Diogenes Laertius. *Lives of Eminent Philosophers*, volume 2. Harvard University Press and William Heinemann, Cambridge (Mass.) and London, 1925.
- [4] Ernest Gardner, Donald J. Gray, and Rohan O’Rahilly. *Anatomy: A Regional Study of Human Structure*. W. B. Saunders, Philadelphia, fourth edition, 1975.
- [5] Susan Haack. *Philosophy of Logics*. Cambridge University Press, London, 1974.
- [6] Rudolf Kruse, Jörg Gebhardt, and Frank Klawonn. *Fuzzy-Systeme*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [7] Carver Mead. *Analog VLSI and Neural Systems*. Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1989.
- [8] Bertrand Russell. Vagueness. *Australasian Journal of Psychology and Philosophy*, 1:84–92, 1923.
- [9] Bruno Scarpellini. Die Nichtaxiomatisierbarkeit des unendlichwertigen Prädikatenkalküls von Łukasiewicz. *Journal of Symbolic Logic*, 27:159–170, 1962.

- [10] Alasdair Urquhart. Many-valued logic. In Dov M. Gabbay and F. Günthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic Vol. 3: Alternatives to Classical Logic*, chapter 2, pages 71–116. D. Reidel, Dordrecht, 1986.
- [11] Lofti A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [12] Lofti A. Zadeh. Fuzzy logic and approximate reasoning (in memory of Grigore Moisil). *Synthese*, 30:407–428, 1975.